

الكفاءات المستهدفة

- حساب نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة عند الحدود(المنتهية أو غير المنتهية) لمجالات مجموعة التعريف.
- حساب نهاية باستعمال المبرهنات المتعلقة بالعمليات على النهايات أو المقارنة وتركيب دالتين.
- دراسة السلوك التقاربي لدالة
- استعمال مبرهنة القيم المتوسطة لإثبات وجود حلول للمعادلة $f(x)=k$ ، k عدد حقيقي معطى.

كوشي أوغسطين لويس:عالم رياضيات و فيزياء من جنسية فرنسية عاش في الفترة من 1789م إلى 1857م. كان لأعماله التي تميزت بالدقة تأثير عظيم على معظم فروع الرياضيات، و بصفة خاصة وضع أسس التحليل الحديث بدلالة النهايات و الاستمرار، و طور نظرية الدوال ذات متغيرات عقدية. شجعه على متابعة نشاطه في الرياضيات العالم لابلاس و العالم لاغرانج و أصبح أستاذا للرياضيات في مدرسة البوليتكنيك، جامعة السوربون و كلية فرنسا و بسبب آرائه السياسية و الدينية رفض أن يقسم يمين الولاء للويس فليب سنة 1830 فنفي مع حفيد تشارلز العاشر ، و عينته جامعة تورينو في منصب كرسي أستاذية أنشئ من أجله، و لكنه تركه لتعليم حفيد تشارلز العاشر.

لقد نشر ما مجموعه 789 عملا ، تتضمن مقالات حول التكاملات المحدودة و انتشار الموجات ، كما نشر أوراقا بحثية في الهندسة و نظرية الأعداد و المرونة و نظرية الخطأ و الفلك و الضوء.

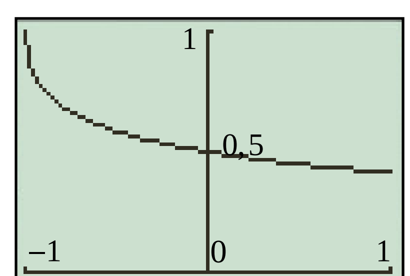

كوشي أوغسطين لويس

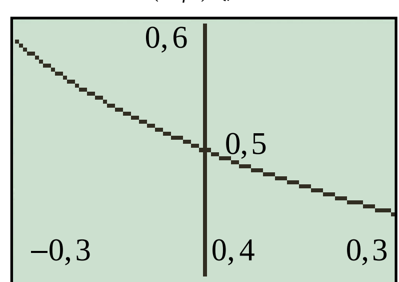
نشاط أول

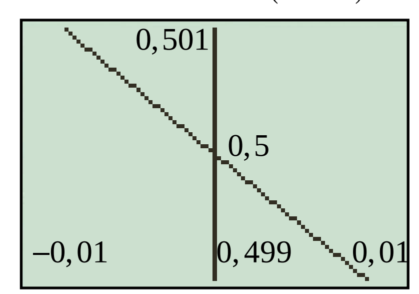
نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1;0[\cup]0;+\infty[$ بـِ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني.

1) وضع تخمين

- أظهر على شاشة حاسبة بيانية التمثيل البياني (C_f) ثم أنجز التكبيرات $(zoom)$ التالية:







- الدالة f غير معرفة عند 0 إلا أنه بإمكان أخذ قيم x قريبة من 0 بالقدر الذي نريد. ضع في هذه الحالة تخمينا بخصوص قيم $f(x)$.

2) إثبات صحة التخمين

نعلم أن الدالة $g: x\mapsto\sqrt{x+1}$ قابلة للاشتقاق عند 0.

- عين العدد المشتق للدالة g عند 0.
- استنتج نهاية الدالة f عند 0

نشاط ثان

1) دراسة مثال

نعتبر الدالة u المعرفة على $]1;+\infty[$ بـِ $u(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$ و لتكن v الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ $v(x)=x^2+1$

- عرف الدالة $v\circ u$.
- لاحظ على شاشة حاسبة بيانية أو مجدول سلوك كل من $u(x)$ و $v\circ u(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي.
- ضع تخمينا بخصوص نهاية الدالة $v\circ u$ عند $+\infty$.
- عين b نهاية الدالة u عند $+\infty$ ثم نهاية الدالة v عند b.
- ماذا تلاحظ ؟

	A	B	C
1	x	u(x)	v0u(x)
2	100		
3	200		
4	300		
5			
6			
7			

2) وضع تخمين

a، b و c تمثل أعددا حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$. u ، v و f دوال حيث $f=v\circ u$.

إذا فرضنا أن $\lim\limits_{x\to a}u(x)=b$ و $\lim\limits_{x\to b}v(x)=c$ ضع تخمينا بخصوص نهاية الدالة f عند a.

نشاط ثالث

تعريف: نسمي الدالة الجزء الصحيح الدالة المعرفة على ℝ و التي ترفق بكل عدد حقيقي x العدد الصحيح n حيث $n \le x < n+1$ و نرمز لها بالرمز E أو $[\ ]$.

1) أحسب $[-2{,}3]$، $E(-1)$، $[\sqrt{3}]$ و $E(11{,}01)$.

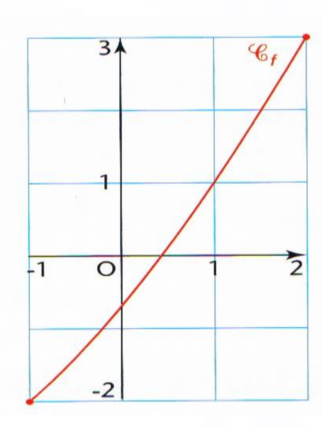
2) نعتبر الدوال f، g و h المعرفة على المجال $[-2;1[$ كما يلي:

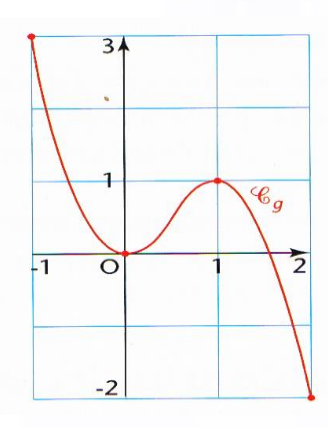
$f(x)=[x]$ ، $g(x)=x-[x]$، $h(x)=x^2+1$ و لتكن (C_f)،(C_g)،(C_h) تمثيلاتها البيانية على الترتيب.

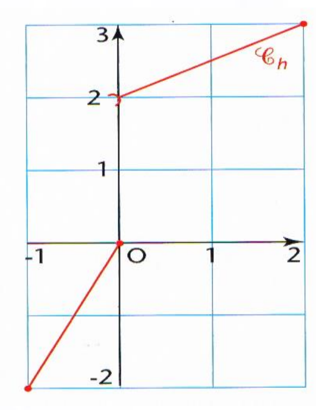
- أرسم في معالم مختلفة التمثيلات البيانية (C_f)،(C_g) و(C_h).
- هل بإمكانك رسم المنحنيات (C_f)،(C_g) و(C_h) بدون رفع القلم (اليد) ؟
- هل تقبل الدوال f، g و h نهاية عند -1 ؟ عند 0 ؟
- أكتب خلاصة.

نشاط رابع

إليك المنحنيات (C_f)، (C_g) و (C_h) الممثلة على التوالي لثلاث دوال f، g و h معرفة على المجال $[-1;2]$ و ليكن k عددا حقيقيا من المجال $[-2;3]$.







1. هل الدوال f، g و h مستمرة على المجال $[-1;2]$ ؟
2. بواسطة قراءة بيانية حدد، حسب قيم العدد الحقيقي k، عدد حلول كل معادلة من المعادلات التالية:

$(1)\ \ f(x)=k$ $\qquad (2)\ \ g(x)=k$ $\qquad (3)\ \ h(x)=k$

3. ماذا تمثل القيمتان -2 و 3 حدود المجال $[-2;3]$ ؟
4. من أجل كل عدد حقيقي k من المجال $[-2;3]$،

- هل تقبل كل معادلة من المعادلات (1)، (2) ، (3) حلا على الأقل في المجال $[-1;2]$ ؟
- هل تقبل كل معادلة من المعادلات (1)، (2) ، (3) حلا وحيدا في المجال $[-1;2]$ ؟

نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة عند $+\infty$ أو $-\infty$

1. نهاية منتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$

تعريف: f دالة معرفة على مجال من الشكل $]x_0;+\infty[$ و l عدد حقيقي.
القول أن نهاية f عند $+\infty$ هي l يعني أن كل مجال مفتوح شامل للعدد l يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي. نكتب $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$ و نقرأ $f(x)$ يؤول إلى l لما يؤول x إلى $+\infty$.

نتيجة: نقول أن المستقيم ذا المعادلة $y=l$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) الممثل للدالة f عند $+\infty$.

ملاحظة: نحصل على تعريف و نتيجة مماثلتين عند $-\infty$.

أمثلة: $* \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ $* \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ $* \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ $* \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$ $* \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$

2. نهاية غيرمنتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$

تعريف1: f دالة معرفة على مجال من الشكل $]x_0;+\infty[$.
القول أن نهاية f عند $+\infty$ هي $+\infty$ يعني أن كل مجال من الشكل $]A;+\infty[$ $(A\in\mathbb{R})$ يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي. نكتب $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و نقرأ $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ لما يؤول x إلى $+\infty$.

تعريف2: f دالة معرفة على مجال من الشكل $]x_0;+\infty[$.
القول أن نهاية f عند $+\infty$ هي $-\infty$ يعني أن كل مجال من الشكل $]-\infty;B[$ $(B\in\mathbb{R})$ يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي. نكتب $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ و نقرأ $f(x)$ يؤول إلى $-\infty$ لما يؤول x إلى $+\infty$.

ملاحظة: نحصل على تعريفين مماثلين عند $-\infty$.

أمثلة: $* \lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ $* \lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ $* \lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ $* \lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ $* \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$

3. المستقيم المقارب المائل

تعريف: ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم و ليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $y=ax+b$
القول أن المستقيم (Δ) مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$) يعني أن:
$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ (على الترتيب $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$)

ملاحظة: إذا كانت الدالة f معرفة كما يلي: $f(x)=ax+b+\varphi(x)$ مع $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$ أو $\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=0$
فمن الواضح أن المستقيم ذا المعادلة $y=ax+b$ مستقيم مقارب مائل للمنحني الممثل للدالة f عند $+\infty$ أو $-\infty$.

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بِـ $f(x)=2x-3+\frac{1}{x^2}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم.
لدينا $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ و منه فالمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x-3$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.

تمرين محلول1: لتكن f الدالة المعرفة على $]3;+\infty[$ بـ $f(x)=\dfrac{2}{x-3}$

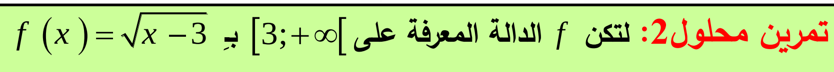
أثبت باستعمال التعريف أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

الحل: ليكن $I=]a;b[$ حيث $a<0<b$ (I مجال مفتوح يشمل 0).

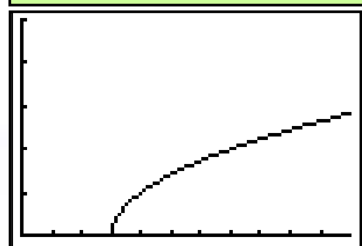
من أجل x من $]3;+\infty[$ ، $f(x)\in I$ يعني $\dfrac{2}{x-3}<b$ أي $x>3+\dfrac{2}{b}$.

نستنتج أنه من أجل x كبير بالقدر الكافي(أكبر من $3+\dfrac{2}{b}$)، المجال I يشمل كل قيم $f(x)$. ومنه نهاية f عند $+\infty$ هي 0.

تمرين محلول2: لتكن f الدالة المعرفة على $[3;+\infty[$ بِـ $f(x)=\sqrt{x-3}$



أثبت باستعمال التعريف أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$



الحل: ليكن A عددا حقيقيا موجبا.

$\sqrt{x-3}\geq A$ يعني $x\geq A^2+3$ ومنه المجال $[A;+\infty[$

يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي.

لدينا إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

تمرين محلول3: لتكن f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بِـ $f(x)=x-1-\dfrac{1}{x}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم.

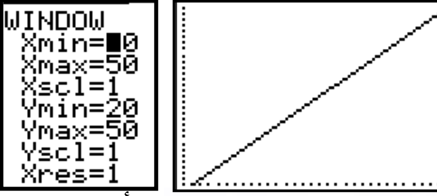
1. بعد تمثيل (C_f) على شاشة حاسبة بيانية، ضع تخمينا بصدد وجود مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f).

2. بين أن المستقيم $(D): y=x-1$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

3. أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D).

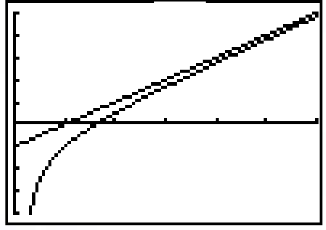
طريقة: لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى $(D): y=ax+b$ ندرس إشارة الفرق $[f(x)-(ax+b)]$.

الحل:1.



يظهر و أن المنحني (C_f) يقترب من مستقيم من أجل قيم لِـ x كبيرة بالقدر الكافي و منه يمكن أن نخمن بوجود مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{1}{x}=0$ و منه المستقيم $(D): y=x-1$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

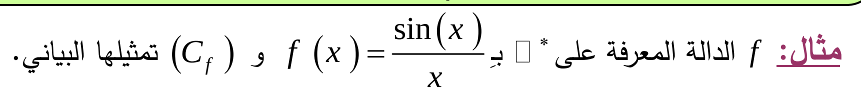


3. $[f(x)-(x-1)]=-\dfrac{1}{x}$ و منه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $[f(x)-(x-1)]<0$. إذن المنحني (C_f) يقع تحت المستقيم المقارب (D).

↲ نـهاية منتهية أو غير منتهية لدالة عند عدد حقيقي

1. نـهاية منتهية عند عدد حقيقي

تعريف: f دالة معرفة على مجموعة من الشكل $]a;x_0[\cup]x_0;b[$ و l عدد حقيقي.
القول أن نهاية f عند x_0 هي l يعني أن كل مجال مفتوح شامل للعدد l يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من x_0. نكتب $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ و نقرأ $f(x)$ يؤول إلى l لما يؤول x إلى x_0.



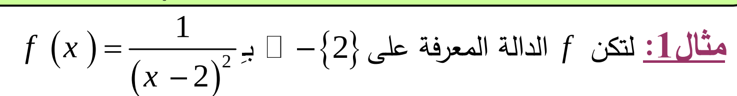
مثال: f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بِ $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني.

تبين شاشة الحاسبة البيانية أنه كلما اقترب x من 0 إلا و اقتربت $f(x)$ من 1.
بإجراء تكبيرات أو باستعمال جداول قيم بواسطة الحاسبة يتضح أكثر أنه يمكننا جعل $f(x)$ قريب من 1 بالقدر الذي نريد بشرط أن يقترب x من 0 بالقدر الكافي. لدينا إذن $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$.

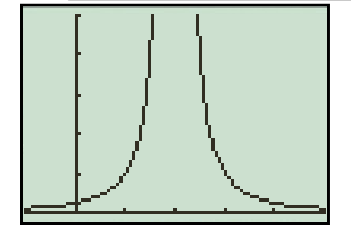
(يمكن إثبات صحة التخمين بإتباع نفس المنهجية المتبعة في النشاط الأول)

2. نـهاية غيرمنتهية عند عدد حقيقي

تعريف: f دالة معرفة على مجموعة من الشكل $]a;x_0[\cup]x_0;b[$.
القول أن نهاية f عند x_0 هي $+\infty$ يعني أن كل مجال من الشكل $[A;+\infty[$ $(A\in\mathbb{R})$ يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من x_0. نكتب $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ و نقرأ $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ لما يؤول x إلى x_0.

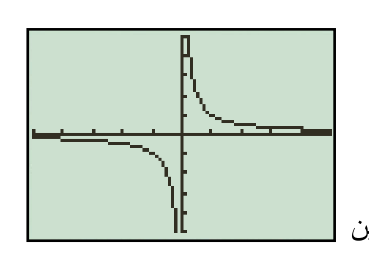


مثال1: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بِ $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$



يتضح جليا أن $f(x)$ تأخذ قيما كبيرة بالقدر الذي نريد بشرط أن يقترب x من 2 بالقدر الكافي. لدينا هكذا $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=+\infty$

مثال2: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بِ $f(x)=\dfrac{1}{x}$. نعتبر الدالتين f_1 و f_2 المعرفتين على الترتيب على $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ بِ $f_1(x)=f_2(x)=f(x)$



من الواضح أن $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x)=+\infty$
نقول في هذه الحالة أن نهاية f عند 0 من اليسار هي $-\infty$ و أن نهاية f عند 0 من اليمين هي $+\infty$ و نكتب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=+\infty$

تعريف: ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم و ليكن (Δ) المستقيم الذي معادلته: $x=a$.
القول أن المستقيم (Δ) مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) يعني أن نهاية الدالة f عند x_0 (من اليسار أو من اليمين) هي $+\infty$ أو $-\infty$.

تمرين محلول1: لتكن f الدالة المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ $f(x)=(x+1)^2-2$

نريد دراسة سلوك $f(x)$ لما يؤول x إلى 1.

1. ضع تخمينا.

2. في أي مجال يجب اختيار x بحيث ينتمي $f(x)$ إلى المجال $[1,99;2,01]$ ؟

3. r عدد حقيقي حيث $0<r<1$.

- في أي مجال يجب اختيار x بحيث $f(x)\in[2-r;2+r]$ ؟
- ماذا تستنتج علما أنه يمكن اختيار r صغيرا بالقدر الذي نريد ؟

الحل:

1. يظهر و أنه كلما اقترب x من 1 اقترب $f(x)$ من $(1+1)^2-2$ أي من العدد 2.

2. $1,99\le f(x)\le 2,01$ يعني $3,99\le (x+1)^2\le 4,01$. يمكن اختيار x بحيث $1,998\le x+1\le 2,002$ أي $0,998\le x\le 1,002$ و منه $x\in[0,998\,;\,1,002]$.

3.* $2-r\le f(x)\le 2+r$ يعني $4-r\le (x+1)^2\le 4+r$. يمكن اختيار x بحيث $\sqrt{4-r}\le x+1\le\sqrt{4+r}$ أي $-1+\sqrt{4-r}\le x\le -1+\sqrt{4+r}$

ومنه $x\in\left[-1+\sqrt{4-r}\,;\,-1+\sqrt{4+r}\right]$.

* يمكننا جعل $f(x)$ قريبا من 2 بالقدر الذي نريد بشرط أخذ x قريبا من 1 بالقدر الكافي و هذا يثبت أن نهاية الدالة f عند 1 هي 2.

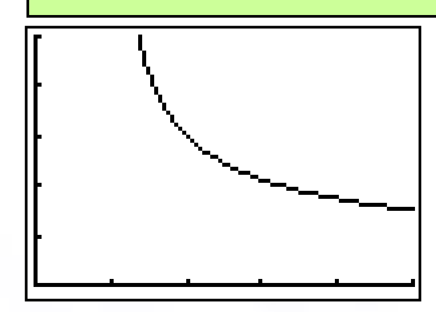
تمرين محلول2: لتكن f الدالة المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{x-1}}$

نريد دراسة سلوك $f(x)$ لما يؤول x إلى 1.

1. مثل منحني الدالة f على شاشة حاسبة بيانية ثم ضع تخمينا بخصوص نهاية f عند 1.

2. A عدد حقيقي موجب تماما.

- في أي مجال يجب اختيار x بحيث يكون $f(x)\ge A$ ؟
- أثبت صحة التخمين الموضوع في السؤال 1.



الحل:

1. نخمن بأن نهاية الدالة f عند 1 هي $+\infty$.

2. $f(x)\ge A$ يعني $\dfrac{3}{\sqrt{x-1}}\ge A$ أي $\sqrt{x-1}\le\dfrac{3}{A}$

أي $x-1\le\dfrac{9}{A^2}$ و أخيرا $x\le 1+\dfrac{9}{A^2}$.

حتى يكون $f(x)\ge A$ نختار x في المجال $\left]1;1+\dfrac{9}{A^2}\right[$.

علما أنه يمكن أخذ A كبيرا بالقدر الذي نريد يمكننا جعل $f(x)$ كبيرا بالقدر الذي نريد بشرط أخذ x قريبا من 1 بالقدر الكافي و هذا يثبت أن نهاية الدالة f عند 1 هي $+\infty$.

ـ تتمات على النهايات

1. بعض نهايات الدوال المرجعية

$\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$ * $\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$ * $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ *

$\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ * $\lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ * $\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ * $\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ *

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ * $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ * $\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1}{x}=+\infty$ * $\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{1}{x}=-\infty$ *

2. العمليات على النهايات

f و g دالتان. a يمثل عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$. نقبل دون برهان المبرهنات التالية:

- نهاية مجموع دالتين:

$\lim_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	$l\in\mathbb{R}$	$l\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	$-\infty$

- نهاية جداء دالتين:

$\lim_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a}\left(f(x)\times g(x)\right)$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت

- نهاية حاصل قسمة دالتين:

$\lim_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$	$\frac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت

ملاحظة: تسمى الحالات التي لا تسمح فيها النظريات السابقة من استنتاج النهاية بحالات "عدم التعيين" (ح ع ت)

3. نهاية دالة كثير حدود أو دالة ناطقة عند $+\infty$ أو $-\infty$

قواعد إجرائية
- النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية حدها الأعلى درجة عند $+\infty$ ($-\infty$).
- النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة عند $+\infty$ ($-\infty$).

مثال: لتكن f الدالة الناطقة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ $f(x)=\frac{2x^2+3x+1}{x^2-1}$

لدينا حالة عدم التعيين بالنسبة لنهاية f عند $+\infty$ إلا أنه بتطبيق القاعدة 2 نتحصل على $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$

تمرين محلول1: أدرس في كل حالة من الحالات التالية نهاية الدالة f المعرفة على D_f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

1. $f(x)=-x^3+2x-2$ ، $D_f=\mathbb{R}$

2. $f(x)=3x^2+x-3$ ، $D_f=\mathbb{R}$

3. $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{2-x}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$

الحل:

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^3\right)=-\infty$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^2\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^2\right)=+\infty$

3. $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2}{-x}\right)$، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2}{-x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$

تمرين محلول2: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2;1\}$ بـ $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2+x-2}$

1. حدد حسب قيم x إشارة x^2+x-2.

2. أدرس النهايات من اليمين و من اليسار عند كل من -2 و 1.

3. أدرس نهايتي الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

الحل:

1.لكثير الحدود x^2+x-2 جذران هما -2 و 1. و بتطبيق القاعدة المحددة لإشارة ثلاثي حدود من الدرجة 3 نجد:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. $\lim\limits_{x\to-2}(2x+3)=-1$ ، $\lim\limits_{x\to-2}\left(x^2+x-2\right)=0$ و بما أنه من أجل $x<-2$ ، $x^2+x-2>0$

فإن $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\<}} f(x)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-2}(2x+3)=-1$ ، $\lim\limits_{x\to-2}\left(x^2+x-2\right)=0$ و بما أنه من أجل $-2<x<1$ ، $x^2+x-2<0$

فإن $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\>}} f(x)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to1}(2x+3)=5$ ، $\lim\limits_{x\to1}\left(x^2+x-2\right)=0$ و بما أنه من أجل $-2<x<1$ ، $x^2+x-2<0$

فإن $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} f(x)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to1}(2x+3)=5$ ، $\lim\limits_{x\to1}\left(x^2+x-2\right)=0$ و بما أنه من أجل $x>1$ ، $x^2+x-2>0$

فإن $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} f(x)=+\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2}{x}\right)=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{x}\right)=0$

نهاية دالة مركبة–النهايات بالمقارنة

1. نهاية دالة مركبة

مبرهنة: a، b و c تمثل أعدادا حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$. u ، v و f دوال حيث $f=v\circ u$.
إذا كانت $\lim\limits_{x\to a}u(x)=b$ و إذا كانت $\lim\limits_{x\to b}v(x)=c$ فإن $\lim\limits_{x\to a}f(x)=c$

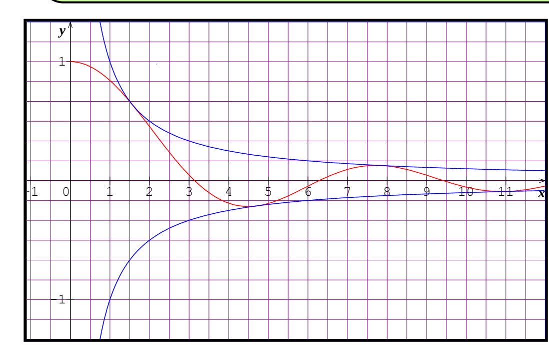
مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}^*$ بِـ $f(x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{x}\right)$ و نريد حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

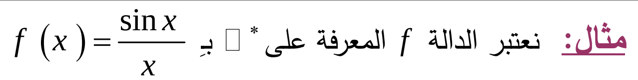
نلاحظ أن f هي مركب الدالتين u و v بهذا الترتيب حيث $u(x)=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{x}$ و $v(x)=\sin x$ $(f=v\circ u)$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=\dfrac{\pi}{2}$ و $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}v(x)=1$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$

2. النهايات بالمقارنة

مبرهنة1: f، g و h دوال و l عدد حقيقي. إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=l$ و إذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$.




مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بِـ $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$

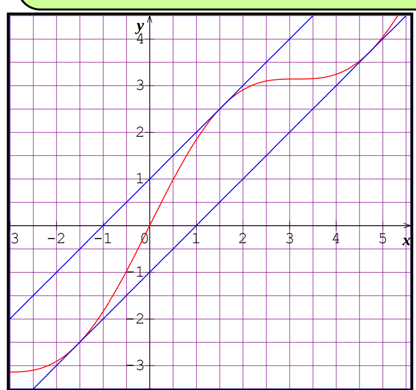
نعلم أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $-1\leq\sin x\leq1$ و منه فإن

من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $-\dfrac{1}{x}\leq\dfrac{\sin x}{x}\leq\dfrac{1}{x}$

و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$

مبرهنة2: f، g دالتان و l عدد حقيقي. إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ و إذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $f(x)\geq g(x)$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

مبرهنة3: f، g دالتان و l عدد حقيقي. إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$ و إذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $f(x)\leq g(x)$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.




ملاحظة: تمدد هذه المبرهنات إلى حالتي النهاية عند $-\infty$ وعند عدد حقيقي.

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ $f(x)=x+\sin x$

نعلم أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $-1\leq\sin x\leq1$ و منه فإن

من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $x-1\leq x+\sin x\leq x+1$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

تمرين محلول1: لتكن f الدالة المعرفة على $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right] \cup \left]1;+\infty\right[$ بِـ $f(x)=\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}$

أدرس نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

الحل:

نلاحظ أن f هي مركب الدالتين u و v بهذا الترتيب حيث $u(x)=\frac{2x+1}{x-1}$ و $v(x)=\sqrt{x}$ $(f=v\circ u)$

* بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)=2$ و $\lim\limits_{x\to2}\sqrt{x}=\sqrt{2}$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\sqrt{2}$. نجد كذلك $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\sqrt{2}$.

* بما أن $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}u(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to0}v(x)=0$ فإن $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}f(x)=0$.

* بما أن $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}u(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}v(x)=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}f(x)=+\infty$.

تمرين محلول2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بِـ $f(x)=1+\frac{\cos x}{x^2}$

1. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$، $1-\frac{1}{x^2}\le f(x)\le 1+\frac{1}{x^2}$

2. أستنتج نهايتي الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

الحل:

1. نعلم أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $-1\le\cos x\le1$ و منه فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$، $-\frac{1}{x^2}\le\frac{\cos x}{x^2}\le\frac{1}{x^2}$

و بالتالي فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$، $1-\frac{1}{x^2}\le1+\frac{\cos x}{x^2}\le1+\frac{1}{x^2}$ أي $1-\frac{1}{x^2}\le f(x)\le1+\frac{1}{x^2}$

2. بما أن $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=1$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$

تمرين محلول3: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ $f(x)=\frac{x}{2+\sin x}$

1. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $\frac{1}{3}\le\frac{1}{2+\sin x}\le1$

2. استنتج نهايتي الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

الحل:

1. من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $-1\le\sin x\le1$ و منه $1\le2+\sin x\le3$ أي $\frac{1}{3}\le\frac{1}{2+\sin x}\le1$

2. لدينا $\frac{1}{3}\le\frac{1}{2+\sin x}$ ومن أجل x من $\left]-\infty;0\right]$ لدينا $\frac{x}{3}\le\frac{x}{2+\sin x}$ و بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{3}=-\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

لدينا $\frac{1}{3}\le\frac{1}{2+\sin x}$ ومن أجل x من $\left[0;+\infty\right[$ لدينا $\frac{x}{2+\sin x}\ge\frac{x}{3}$ و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{3}=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

ـ الاستمرارية

1. تعريف الاستمرارية

تعريف: f دالة مجموعة تعريفها D_f و a عدد حقيقي غير معزول من D_f.

القول أن الدالة f مستمرة عند a يعني أن نهاية الدالة f عند a هي $f(a)$.

(f مستمرة عند a) يعني $\left(\lim_{x \to a} f(x) = f(a)\right)$

ملاحظة: القول أن الدالة f مستمرة على مجال I يعني أن f مستمرة عند كل عدد حقيقي من I.

التفسير البياني: تكون الدالة f مستمرة على مجال I عندما يمكن رسم منحنيها البياني على هذا المجال دون رفع القلم (اليد).

مثال1:

الدالة f الممثلة في الشكل المقابل غير مستمرة على المجال $[-2;3]$ لأنه لا يمكن رسم منحنيها البياني دون رفع القلم.

في حين نلاحظ أنها مستمرة على كل من المجالين $[-2;1]$ و $]1;3]$.



مثال2:

الدالة f المعرفة على المجال $]-2;2[$ بـ:

$$\begin{cases} f(x) = -x & \text{إذا كان } x \in]-2;0] \\ f(x) = x^2 & \text{إذا كان } x \in]0;2[\end{cases}$$

و الممثلة في الشكل المقابل مستمرة على المجال $]-2;2[$ لأنه باستطاعتنا رسم تمثيلها البياني بدون رفع القلم.

2. خواص (تقبل دون برهان)

نقبل بأن كل الدوال المقررة في هذا المستوى و المحصل عليها بالعمليات على دوال مألوفة أو بتركيبها مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

نتائج

- الدوال المرجعية مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.
- الدوال كثيرات الحدود، sin و cos مستمرة على $\mathbb{R}$.
- الدوال الناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود) مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

أمثلة:

- الدالة $x \mapsto 2x^2 - 3x + 4$ مستمرة على $\mathbb{R}$.
- الدالة $x \mapsto \dfrac{3x-2}{x^2-1}$ مستمرة على كل من المجالات $]-\infty;-1[$ ، $]-1;1[$ و $]1;+\infty[$.

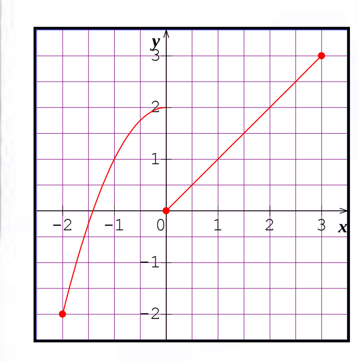
تمرين محلول1: لتكن f الدالة المعرفة على $[-2;3]$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=-x^2+2 & \text{إذا كان } x\in[-2;0[\\ f(x)=x & \text{إذا كان } x\in[0;3] \end{cases}$$

1. مثل بيانيا الدالة f. هل تقبل الدالة f نهاية عند 0 ؟

2. هل الدالة f مستمرة على $[-2;3]$ ؟ أذكر مجالا تكون الدالة f مستمرة عليه.

الحل:



1. أنظر الشكل المقابل. لدينا من جهة $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}} f(x)=2$ و لدينا من جهة ثانية $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} f(x)=0$. إذن لا تقبل الدالة f نهاية عند 0.

2. الدالة غير مستمرة عند0 و بالتالي فهي غير مستمرة على $[-2;3]$.

نلاحظ أنه غير ممكن رسم تمثيلها البياني دون رفع القلم.

الدالة f مستمرة مثلا على المجال $[0;3]$.

تمرين محلول2: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=(x^2+x+1)\cos x$

بين أن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

الحل:

الدالتان $x\mapsto \cos x$ و $x\mapsto x^2+x+1$ مستمرتان على $\mathbb{R}$.

الدالة f هي جداء دالتين مستمرتين على $\mathbb{R}$ فهي إذن مستمرة على $\mathbb{R}$.

تمرين محلول3: نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1;2[$ بـ: $f(x)=xE(x)+1$

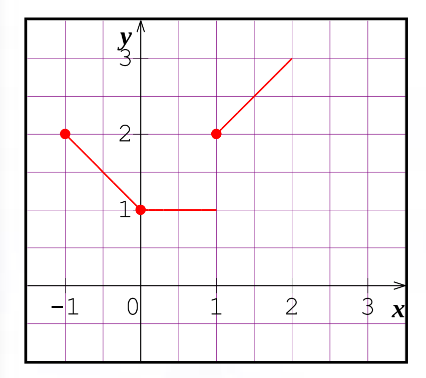
حيث الدالة $x\mapsto E(x)$ هي الدالة الجزء الصحيح (أنظر النشاط الأول)

1. عين عبارة $f(x)$ على كل من المجالات التالية: $[-1;0[$ ، $[0;1[$ و $[1;2[$.

2. أرسم في معلم $(O;I,J)$ المنحني الممثل للدالة f.

3. هل الدالة f مستمرة على المجال $[-1;1[$ ؟ على المجال $[-1;2[$ ؟

الحل



1. من أجل $x\in[-1;0[$ لدينا $E(x)=-1$ ومنه $f(x)=-x+1$

من أجل $x\in[0;1[$ لدينا $E(x)=0$ ومنه $f(x)=1$

من أجل $x\in[1;2[$ لدينا $E(x)=1$ ومنه $f(x)=x+1$

2. انظر الشكل المقابل.

3. نعم الدالة f مستمرة على المجال $[-1;1[$ لأنه بإمكاننا رسم جزء المنحني في هذا المجال دون رفع القلم.

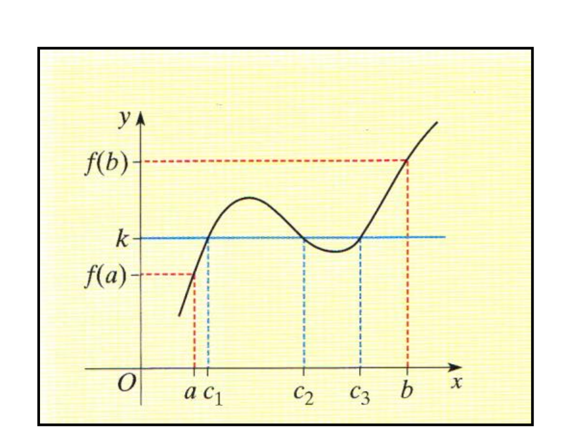
الدالة f ليست مستمرة على المجال $[-1;2[$ لأنها غير مستمرة عند 1 كما نلاحظ أنه لا يمكن رسم منحنيها البياني دون رفع القلم.

مبرهنة القيم المتوسطة

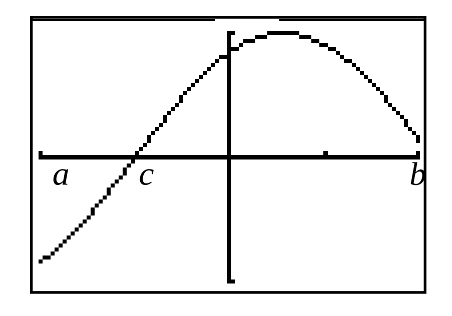
1. مبرهنة القيم المتوسطة (تقبل دون برهان)

مبرهنة: f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a;b]$.
من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c)=k$.

2. التفسير البياني



f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a;b]$ و ليكن (C) منحنيها البياني في معلم $(O;I,J)$.
من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=k$ يقطع على الأقل مرة واحدة المنحنى (C) في نقطة فاصلتها c محصورة بين a و b.
(بالنسبة للشكل المقابل (Δ) يقطع (C) في ثلاث نقط فواصلها على الترتيب c_1، c_2 و c_3).



حالة خاصة: إذا كانت f دالة مستمرة على مجال $[a;b]$ و كان $f(a)\times f(b)<0$ (العدد 0 محصور بين $f(a)$ و $f(b)$) فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c)=0$ أي أن f تنعدم على الأقل مرة واحدة على $[a;b]$.

3. المعادلة $f(x)=k$

إذا كانت f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a;b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المعادلة $f(x)=k$ تقبل على الأقل حلا c محصورا بين a و b.

ملاحظة: مبرهنة القيم المتوسطة تؤكد فقط وجود حل على الأقل للمعادلة $f(x)=k$ أما تعيين الحلول أو قيم مقربة لها فيتم بإتباع خوارزميات مختلفة.

مثال: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x^3+x-1$
f دالة كثير حدود فهي إذن مستمرة على $\mathbb{R}$ و لدينا $f(0)=-1$ و $f(1)=1$، العدد 0 محصور بين $f(0)$ و $f(1)$ ومنه، حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا محصورا بين 0 و 1.

تمرين محلول1: برهن باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة $x^3-2x=-2$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[-2;1]$.

طريقة: لإثبات وجود حلول معادلة على مجال $[a;b]$ باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة نتبع الخطوات التالية:

- نكتب المعادلة على الشكل $f(x)=k$.
- نتحقق من استمرارية الدالة f على المجال $[a;b]$.
- نتحقق من أن العدد k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$.

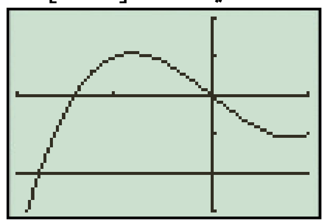
الحل: يمكن كتابة المعادلة $x^3-2x=-2$ على الشكل $f(x)=-2$ حيث f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ:
$f(x)=x^3-2x$ (يمكن اختيار كتابة أخرى مماثلة)

الدالة f دالة كثير حدود و بالتالي فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ و من تم على $[-2;1]$.

لدينا $f(-2)=-4$ و $f(1)=-1$ كما نلاحظ أن العدد -2 محصور بين العددين -4 و -1.

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $x^3-2x=-2$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[-2;1]$.

ملاحظة: يمكن مراقبة النتيجة باستعمال حاسبة بيانية بحيث يتم تمثيل الدالة f و المستقيم ذا المعادلة $y=-2$ ثم ملاحظة تقاطعهما.



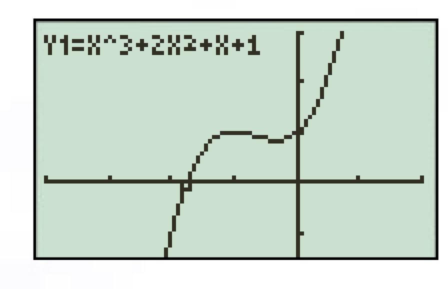
تمرين محلول2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3+2x^2+x+1$

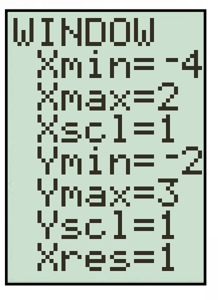
1. أظهر على شاشة حاسبة بيانية التمثيل البياني للدالة f.

2. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في مجال يطلب تحديده.

الحل:

1. نحصل مثلا على الشكل المقابل.





2. يوحي الشكل بأن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا محصورا بين -2 و -1.

بما أن f دالة كثير حدود فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ و بصفة خاصة على المجال $[-2;-1]$.

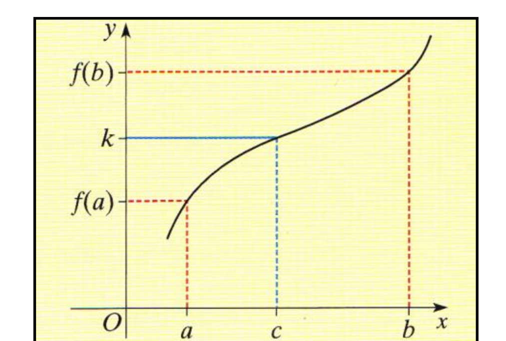
لدينا من جهة ثانية $f(-2)=-1$ و $f(-1)=1$ و بما أن 0 محصور بين -1 و 1 أي بين $f(-2)$ و $f(-1)$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[-2;-1]$.

ـــ الدوال المستمرة و الرتيبة تماما

1. الدوال المستمرة و الرتيبة تماما على مجال $[a;b]$

مبرهنة: إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماما على مجال $[a;b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a;b]$.



البرهان:

نفرض أن الدالة f مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[a;b]$.

و ليكن k عدد حقيقي محصور بين $f(a)$ و $f(b)$. ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c)=k$.

لنفرض أنه يوجد عدد حقيقي آخر c' مختلف عن c، محصور بين a و b و يحقق $f(c')=k$.

يكون لدينا حينئذ $c \neq c'$ و $f(c)=f(c')$ و هذا يناقض الرتابة التامة للدالة f على المجال $[a;b]$.

و بالتالي يوجد عدد حقيقي وحيد c من $[a;b]$ بحيث $f(c)=k$ أي أن c هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=k$.

2. ملاحظات

ملاحظة1: إذا كانت الدالة f مستمرة و رتيبة تماما (متزايدة تماما أو متناقصة تماما) على مجال $[a;b]$ فإن جدول تغيراتها يأخذ أحد الشكلين التاليين:

x	a	x_0	b
$f(x)$	$f(a)$ ↗	k	↗ $f(b)$

x	a	x_0	b
$f(x)$	$f(a)$ ↘	k	↘ $f(b)$

من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا x_0 في المجال $[a;b]$.

ملاحظة2: تقبل المبرهنة السابقة عدة تمديدات في حالة الدالة f مستمرة و رتيبة تماما على مجال I مفتوح أو مفتوح من إحدى الجهتين، محدود أو غير محدود.

تذكير: الأسهم المائلة في جدول تغيرات دالة تترجم استمرارية و رتابة الدالة على المجال المعتبر.

مثال:

لتكن f الدالة المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ $f(x)=\dfrac{2}{x+1}$

الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على $]-1;+\infty[$ و لدينا $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$.

إذن من أجل كل عدد حقيقي k من $]0;+\infty[$، المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا x_0 في المجال $]-1;+\infty[$.

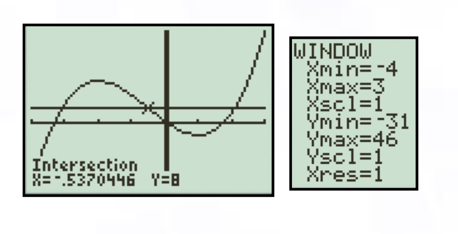
تمرين محلول1: نعتبر الدالة f المعرفة على $[-4;3]$ بـ: $f(x)=2x^3+2x^2-12x+1$

1. أحسب $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
2. أرسم التمثيل البياني للدالة f على شاشة حاسبة بيانية باختيار نافذة مناسبة.
3. بين أن المعادلة $f(x)=8$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[-2;1]$.
4. باستعمال حاسبة بيانية أوجد حصرا لهذا الحل سعته 10^{-2}.

الحل:

1. من أجل كل x من $[-4;3]$، $f'(x)=6(x+2)(x-1)$

x	-4		-2		1		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-31	↗	21	↘	-6	↗	46



أنظر الشكل المقابل.

2. لدينا $f(-2)=21$ ، $f(1)=-6$ و $-6\le 8\le 21$. f دالة كثير حدود فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ و بصفة خاصة على المجال $[-2;1]$.إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=8$ تقبل على الأقل حلا c في المجال $[-2;1]$.و بما أن f متناقصة تماما على $[-2;1]$ فإن c وحيد.
3. لتعيين حصرا للحل c يمكننا، بعد تمثيل المستقيم ذي المعادلة $y=8$ ، إظهار قيم مقربة لإحداثيي نقطة التقاطع و هكذا نقرأ $c\approx -0,5370446$ و منه نستنتج الحصر التالي: $-0,54<c<-0,53$.

تمرين محلول2: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=-x^3-2x+5$

1. برهن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α .
2. مثل على شاشة حاسبة بيانية المنحني الممثل للدالة f ثم عين حصرا للعدد α سعته 10^{-1}.
3. عين حسب قيم x إشارة الدالة f.

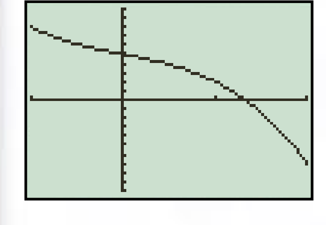
الحل:

1. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=-(3x^2+2)$ و بالتالي لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)<0$. إذن الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

لدينا كذلك $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$. كما أن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنها كثير حدود.

نستنتج مما سبق أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α .

2. نثبت بإتباع مثلا نفس الطريقة السابقة أو باستعمال مجدول أو باستعمال جدول قيم مع اختيار الخطوة $0,1$ أن $1,3<\alpha<1,4$.
3. من أجل $x\in]-\infty;\alpha[$ ، $f(x)>0$ و من أجل $x\in]\alpha;+\infty[$ ، $f(x)<0$.



A	B
x	f(x)
1	2
1,1	1,469
1,2	0,872
1,3	0,203
1,4	-0,544
1,5	-1,375
1,6	-2,296
1,7	-3,313

إزالة حالة عدم التعيين

1. بالاختزال

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2;1\}$ بـ $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2+x+2}{x^2+x-2}$

- أحسب $\lim\limits_{x\to-2}\left(x^3+2x^2+x+2\right)$ و $\lim\limits_{x\to-2}\left(x^2+x-2\right)$. هل يمكن استنتاج نهاية الدالة f عند -2 ؟
- قم بتحليل كل من x^3+2x^2+x+2 و x^2+x-2 .
- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-2;1\}$، $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$.
- استنتج نهاية الدالة f عند -2.

تطبيق: أدرس النهاية عند 1 للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ $g(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-2x+1}$.

2. باستعمال التحليل

نعتبر الدالة f المعرفة على $[1;+\infty[$ بـ $f(x)=2x+1-\sqrt{x^2+x-2}$

- هل يمكن تعيين نهاية الدالة f عند $+\infty$ مباشرة ؟ لماذا ؟
- بين أنه من أجل كل x من $]1;+\infty[$، $f(x)=x\left(2+\dfrac{1}{x}-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}\right)$.
- استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

تطبيق: أدرس النهاية عند $+\infty$ للدالة g المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ $g(x)=x+2-\sqrt{x}$.

3. باستعمال المرافق

نعتبر الدالة f المعرفة على $[2;+\infty[$ بـ $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2x}$

- تحقق أن لدينا حالة عدم التعيين لما يؤول x إلى $+\infty$.
- بين أنه من أجل كل x من $[2;+\infty[$، $f(x)=\dfrac{2+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}}$
- استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

تطبيق: أدرس النهاية عند $-\infty$ للدالة g المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ $g(x)=x+2+\sqrt{x^2+x}$.

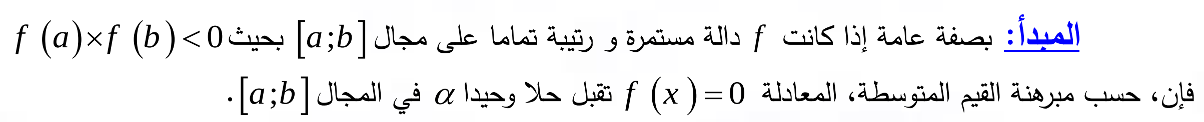
4. باستعمال العدد المشتق

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x)=\dfrac{\cos x-1}{x}$

- هل يمكن تعيين نهاية الدالة f عند 0 مباشرة ؟ لماذا ؟
- باستعمال تعريف العدد المشتق عند 0 للدالة $x\mapsto\cos x$ عين نهاية الدالة f عند 0.

تطبيق: أدرس النهاية عند 0 للدالة g المعرفة على $[-1;0[\cup]0;+\infty[$ بـ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

إيجاد حصر لحل معادلة بالتنصيف



المبدأ: بصفة عامة إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماما على مجال $[a;b]$ بحيث $f(a)\times f(b)<0$ فإن، حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[a;b]$.

نعلم أن $m=\dfrac{a+b}{2}$ هو مركز المجال $[a;b]$.

$a \quad m \quad b$

1. ماذا يمكن القول عن α إذا كان $f(a)\times f(m)<0$ ؟
2. ماذا يمكن القول عن α إذا كان $f(a)\times f(m)>0$ ؟

نواصل بنفس الطريقة من خلال تعويض a أو b بِـ m و ذلك إلى غاية الحصول على الحصر المرغوب فيه.

تعيين حصر لِـ α:

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ $f(x)=x^3-3x-3$

1. برهن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[2;3]$.
2. بحساب $f(m)$، حيث m هو مركز $[2;3]$، عين حصرا لِـ α سعته $0,5$.
3. بتعويض 2 و 3 بحدي الحصر السابق و بإتباع نفس المنهجية أوجد حصرا لِـ α. ما هي سعته ؟
4. ما هي سعة الحصر المحصل عليه بعد n مرحلة علما أنه في كل مرحلة يتم قسمة السعة على 2 ؟

استعمال مجدول:

1. لمتابعة العملية السابقة أنجز ورق الحساب أسفله بإتباع الخطوات التالية:
   - نحجز في الخلية $D2$: $=(B2+C2)/2$
   - نحجز في الخلية $E2$: $B2\text{^}3-3*B2-3$ ثم ننقلها نحو كل من الخليتين $F2$ و $G2$.
   - في الخليتين $B3$ و $C3$ نحجز على الترتيب: $=SI(E2*G2<0;B2;D2)$ و $=SI(E2*G2<0;D2;C2)$ ثم نسحب نحو الأسفل في كل عمود من أعمدة ورقة الحساب.

برامج لحاسبة بيانية:

TI 82-83

```
Prompt A, B, E
While B – A ⩾ E
(A + B)/2 → C
A → X
Y1 → F
C → X
Y1 → G
If F × G ⩽ 0
Then
C → B
Else
C → A
End
End
Disp A, B
```

TI 89-92

```
Dicho()
Prgm
Local c
Prompt a, b, e
While b – a ⩾ e
(a + b)/2 → c
If y1(a) *y1(b) ⩽ 0 Then
c → b
Else
c → a
EndIf
EndWhile
Disp a, b
EndPrgm
```

Casio Graph

```
? → A
? → B
? → E
While B – A ⩾ E
A → X
Y1 → F
(A + B)/2 → X
Y1 → G
If F × G ⩽ 0
Then X → B
Else X → A
IfEnd
WhileEnd
A◢
B
```

2. ابتداء من أي قيمة لِـ n تكون سعة حصر العدد α أصغر من 10^{-5} ؟

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	a	b	m=(a+b)/2	f(a)	f(b)	f(m)	b-a
2	0	2	3	2,5	-1	15	5,125	1
3	1	2	2,5	2,25	-1	5,125	1,640625	0,5
4	2	2	2,25	2,125	-1	1,640625	0,220703	0,25
5	3	2	2,125	2,0625	-1	0,220703	-0,41382	0,125
6	4	2,0625	2,125	2,09375	-0,41382	0,220703	-0,10269	0,0625
7	5	2,09375	2,125	2,109375	-0,10269	0,220703	0,057461	0,03125
8	6	2,09375	2,109375	2,101563	-0,10269	0,057461	-0,023	0,015625
9	7	2,101563	2,109375	2,105469	-0,023	0,057461	0,017134	0,007813
10	8	2,101563	2,105469	2,103516	-0,023	0,017134	-0,00296	0,003906

موضوع محلول

التمرين : حسب بكالوريا

معلم متعامد للمستوي $(O;\vec{i};\vec{j})$، وحدة الرسم هي $1cm$.

نعتبر الدالة u المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$u(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ نسمي $\mathscr{C}$ تمثيلها البياني .

1. أ - عيّن نهاية الدالة u عند $-\infty$.

ب - بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x، لدينا : $u(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$. استنتج نهاية الدالة u عند $+\infty$.

2. أ - بيّن أنّ $\left[u(x)+2x\right]$ تؤول إلى 0 عندما x يؤول إلى $-\infty$.

ب - بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x، $u(x)>0$.

استنتج إشارة $\left[u(x)+2x\right]$.

جـ - فسّر هذه النتائج بيانيا .

نقبل أنّ الدالة u متناقصة تماما على $\mathbb{R}$. أرسم $\mathscr{C}$ ومستقيمه المقارب المائل .

حل مختصر

1. أ - لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+1=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$

ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}-x=+\infty$.

ب - $u(x)=\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$.

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}+x=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$.

2. أ - من أجل كل عدد حقيقي x، $u(x)+2x=\sqrt{x^2+1}+x$ ومنه

$u(x)+2x=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$ حسب أ - لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}-x=+\infty$ إذن

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[u(x)+2x\right]=0$.

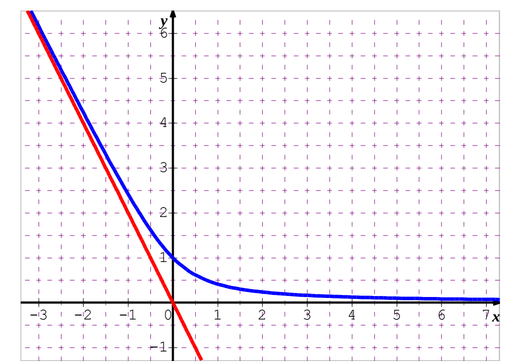
ب - من أجل كل عدد حقيقي x ، $u(x)=\sqrt{x^2+1}-x=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

وبالتالي إذا كان $x\le 0$ فإن $u(x)>0$ ، و إذا كان $x\ge 0$ فإن $u(x)>0$.

إذن من أجل كل عدد حقيقي x، $u(x)>0$.

وحسب **1.** أ - من أجل كل حقيقي x، $u(x)+2x=\dfrac{1}{u(x)}$ إذن $u(x)+2x>0$

جـ - المستقيم D ذي المعادلة $y=-2x$ هو مقارب مائل للمنحني $\mathscr{C}$ ، و $\mathscr{C}$ يقع فوق المستقيم D .



تعاليق

نلاحظ أن هناك نهاية لدالة مركّبة.

استعمال المرافق لإزالة حلة عدم التعيين .

إذن يكون حامل محور الفواصل مقاربا أفقيا للمنحني $\mathscr{C}$.

$u(x)+2x>0$ معناه $u(x)>-2x$ وبالتالي يقع $\mathscr{C}$ فوق D .

لاحظ أنّ $u(0)=1$.

موضوع موجه

تنبيه

في بعض الاستدلالات نتّبع طرائق استقرائية ، أي عند تحليل قضية يطلب تبريرها (تكون شرطا كافيا) نجدها صحيحة .

التمرين.

ليكن b عددا حقيقيا موجبا تماما .

1. عبّر بدلالة b عن عدد A_1 حيث ، من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما وأكبر من A_1 يكون $\frac{1}{x}<b$.

2. عبّر بدلالة b عن عدد A_2 حيث ، من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما وأكبر من A_2 يكون $\frac{1}{2x+1}<b$.

3. لتكن f دالة معرّفة على $]0;+\infty[$ حيث ، من أجل كل عدد حقيقي x من هذا المجال يكون : $\frac{-1}{2x+1}\leq f(x)\leq\frac{1}{x}$.

أ - عيّن عددا A ، بدلالة b ، حيث من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما وأكبر من أو يساوي A يكون $f(x)\in]-b;b[$.

ب - ما هي الخاصية على الدالة f التي برهنت في السؤال السابق ؟

جـ - اقترح تبريرا آخر لهذه الخاصية باستعمال مبرهنة درست يطلب كتابتها كلياً وبدقّة .

توجيهات

1. عين شرطا على x حتى يكون $\frac{1}{x}<b$ ثمّ استنتج A_1 .

2. يمكن استعمال النتيجة السابقة حتى يكون الشرط $\frac{1}{2x+1}<b$ كافيا لضمان الشرط $2x+1>A_1$.

3. أ - لكي يكون $f(x)\in]-b;b[$ يكفي أن يكون $\frac{1}{x}<b$ و $\frac{-1}{2x+1}>-b$.

ب - تذكّر مفهوم النهاية .

جـ - $\frac{-1}{2x+1}\leq f(x)\leq\frac{1}{x}$ استعمل المبرهنة حول النهاية والحصر .

تمارين تطبيقية

1 - نهاية منتهية أو غير منتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$

1 نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\frac{3x-2}{x+1}$$

1) أوجد عدداً حقيقيا A حيث إذا كان $x>A$ فإن $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]2,9;3,1[$.

2) بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=3$ مقارب للمنحنى C_f الممثل لدالة f.

3) ادرس وضعية المنحنى C_f بالنسبة إلى المستقيم Δ.

2 نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;1[$ بـ:

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1}$$

1) أوجد عدداً حقيقيا A حيث إذا كان $x<A$ فإن $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]0,9;1,1[$.

2) بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=1$ مقارب للمنحنى C_f الممثل لدالة f.

3) ادرس وضعية المنحنى C_f بالنسبة إلى المستقيم Δ.

3 اثبت باستعمال التعريف أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}=0$

4 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2x-3$

اثبت باستعمال التعريف أن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

5 لتكن الدالة f المعرفة

على $]-\infty;1[$ بـ $f(x)=\sqrt{1-x}$

اثبت باستعمال التعريف أن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

6 لتكن الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=x+\frac{1}{x-1}$$

و ليكن C_f تمثيلها البياني في معلم.

1) بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x$ مقارب للمنحنى C_f عند $+\infty$.

2) ادرس وضعية المنحنى C_f بالنسبة إلى المستقيم Δ.

7 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=2x-1-\frac{2}{x^2+1}$$

و ليكن C_f تمثيلها البياني في معلم.

1) بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x-1$ مقارب للمنحنى C_f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

2) ادرس وضعية المنحنى C_f بالنسبة إلى المستقيم Δ.

- في التمارين من **8** إلى **11** اذكر إن كان منحنى الدالة f يقبل المستقيم Δ كمستقيم مقارب عند $-\infty$ و عند $+\infty$ ثم حدد وضعية المنحنى بالنسبة إلى Δ.

8 أ) $f(x)=1+\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ ، $\Delta: y=1$

ب) $f(x)=-\frac{1}{3}-\frac{1}{x^2}$ ، $\Delta: y=-\frac{1}{3}$

9 أ) $f(x)=2x+1+\frac{5}{x-3}$ ، $\Delta: y=2x+1$

ب) $f(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{x}{x^2-1}$ ، $\Delta: y=-\frac{1}{2}x$

10 أ) $f(x)=x+3-\frac{2}{|x|}$ ، $\Delta: y=x+3$

ب) $f(x)=\frac{\sin x}{x}-x+1$ ، $\Delta: y=-x+1$

11 أ) $f(x)=\frac{x^2+x-1}{1-2x}$ ، $\Delta: y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$

ب) $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2-1}$ ، $\Delta: y=x$

2 - نهاية منتهية أو غير منتهية عند عدد حقيق

12 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2x+3$

نريد دراسة سلوك $f(x)$ لما x يؤول إلى 2.

1) ضع تخمينا لسلوك $f(x)$ لما x يؤول إلى 2.

2) في أي مجال يجب اختيار x بحيث ينتمي $f(x)$ إلى $]6,99;7,01[$؟

3) α عدد حقيقي حيث $0<\alpha<1$

• في أي مجال يجب اختيار x بحيث ينتمي $f(x)$ إلى $]7-\alpha;7+\alpha[$ ؟

• علما أننا نختار α صغير بالقدر الذي نريد ، ماذا تستنتج؟

13 – خمن النهاية عند 4 للدالة f المعرفة بـ:

$$f(x)=\frac{x+2}{x-2}$$

– أوجد مجالا I مركزه 4 بحيث إذا كان $x\in I$ فإن $f(x)\in]2,95;3,05[$

14 خمن النهاية عند 2 للدالة f المعرفة بـ: $f(x)=\frac{3x+4}{(x-2)^2}$ ، ثم أوجد عدداً حقيقيا a بحيث إذا كان $x\in]2-a;2+a[$ فإن $f(x)>10^3$

15 لتكن الدالة f المعرفة على $]2;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=-\frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

1) الشكل التالي هو التمثيل البياني (C_f) للدالة f على شاشة حاسبة بيانية

• ماذا تخمن بالنسبة سلوك الدالة f عندما يؤول x إلى 2؟

2) A عدد حقيقي موجب تماما

• في أ مجال يجب اختيار x بحيث يكون $f(x)\leq -A$ ؟

• أثبت صحة التخمين السابق.

3) ماذا يمكن القول عن المستقيم الذي معادلته $x=2$ بالنسبة للمنحنى (C_f)؟

16 1) ادرس النهاية عند $-\infty$، عند $+\infty$ وعند 1 للدالة f المعرفة بـ: $f(x)=\frac{2x+5}{x-1}$

2) حدّد معادلات المستقيمات المقاربة لمنحنى الدالة f و ادرس وضعيته بالنسبة إلى المستقيم المقارب الأفقي.

17 f هي الدالة العددية المعرفة بـ: $f(x)=\frac{-3x}{x+2}$

1) عين مجموعة تعريف الدالة f ثم احسب النهايات عند حدود مجموعة التعريف.

2) حدّد معادلات المستقيمات المقاربة لمنحنى الدالة f و ادرس وضعيته بالنسبة إلى المستقيم المقارب الأفقي.

3 ـ تتمات على النهايات

• في التمارين من **18** إلى **22** و في كل حالة من الحالات ادرس نهاية الدالة f ، إذا كانت f غير معرفة عند a ادرس النهاية على يمين و على يسار a

18 أ) $f(x)=2x^3-x+1$ عند $-\infty$، عند $+\infty$

ب) $f(x)=-3x^4+2x+4$ عند $-\infty$، عند $+\infty$

ج) $f(x)=-x^3+x^2+x+1$ عند $-\infty$ ، عند $+\infty$

19 أ) $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ عند $-\infty$، عند $+\infty$ ، عند -1

ب) $f(x)=\frac{2x^2+5}{x-2}$ عند $-\infty$، عند $+\infty$ ، عند 2

ج) $f(x)=\frac{-4x+1}{3-x}$ عند $-\infty$، عند $+\infty$ ، عند 3

20 أ) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ عند $-\infty$، عند $+\infty$

ب) $f(x)=\frac{x+1}{(x-2)^2}$ عند $-\infty$، عند $+\infty$ ، عند 2

ج) $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2}$ عند $-\infty$، عند $+\infty$ ، عند 0

21 أ) $f(x)=2x-1+\frac{3}{x}$ عند $-\infty$ ، عند $+\infty$، عن 0

ب) $f(x)=3-\frac{1}{(x+1)^2}$ عند $-\infty$ ، عند $+\infty$، عند -1

ج) $f(x)=x^2+x-\frac{1}{x-3}$ عند $-\infty$، عند $+\infty$، عند 3

22 أ) $f(x)=\frac{1}{(x-1)(4-x)}$ عند $-\infty$، عند $+\infty$ ، عند 1 ، عند 4

ب) $f(x)=2x+\frac{1}{x+1}-\frac{2}{3-x}$ عند $-\infty$ ، عند $+\infty$ ، عند -1 ، عند 3

ج) $f(x)=x^2+\frac{1}{(x+2)^2}$ عند $-\infty$، عند $+\infty$، عند -2

• في التمارين من **23** إلى **28** ، في كل حالة من الحالات وباستعمال العمليات على النهايات ادرس نهاية الدالة f ، إذا

كانت f غير معرفة عند a ادرس إن كان ضروريا النهاية على يمين و على يسار a .

23 أ) $f(x)=2x^2+\sqrt{x}+1$ عند $+\infty$

ب) $f(x)=\frac{1}{x-1}+2\sqrt{x}$ عند $+\infty$ ، عند 1

24 أ) $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}-2}$ عند 4

ب) $f(x)=(1-x)(2-\sqrt{-x})$ عند $-\infty$ ، عند 0

25 أ) $f(x)=\frac{2}{x}-\cos x$ عند 0 ، عند $+\infty$

ب) $f(x)=\sin(2x)+x$ عند $\frac{\pi}{4}$ ، عند $+\infty$

26 أ) $f(x)=x^3+x^2-x-1$ عند $+\infty$

ب) $f(x)=\frac{x+2}{3-\sqrt{x}}$ عند $+\infty$

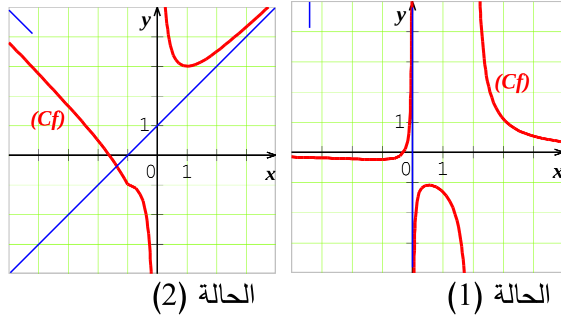
27 أ) $f(x)=\sqrt{x}-1-2x$ عند $+\infty$

ب) $f(x)=\frac{x^2+x+1-\sqrt{x}}{x^2+2}$ عند $+\infty$

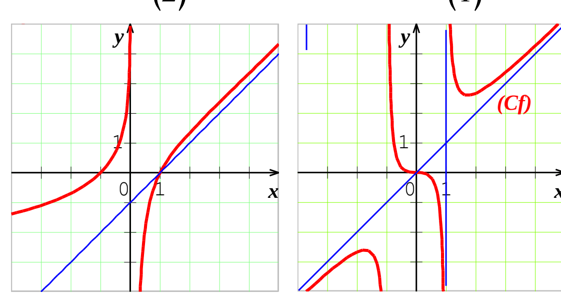
28 أ) $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$ عند $+\infty$

ب) $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}-x$ عند $-\infty$

29 المنحني C_f هو التمثيل البياني الممثل لدالة f في كل حالة من الحالات الثلاث عين D مجموعة تعريف الدالة f ثم خمّن النهايات في أطراف المجموعة D .



الحالة (2) الحالة (1)



الحالة (4) الحالة (3)

4 - نهاية دالة مركبة – النهايات بالمقارنة

30 احسب النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 3}\sqrt{\frac{3x+4}{x-3}}$ ، 2) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1}\sqrt{\frac{3-6x}{1-x}}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}$ ، 4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{-2x^3+x-3}$

31 f هي الدالة المعرفة على $]-2;2[$ بـ:

$$f(x)=\frac{-3}{\sqrt{4-x^2}}$$

احسب نهاية الدالة f عند -2 و عند 2 .

32 احسب النهايات التالية:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{x+4}{x^2-3}\right)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{\pi x-1}{2x}\right)$ ،

$\lim\limits_{x\to-1}\sin\left(-\frac{\pi}{2}x\right)+\frac{1}{(x+1)^2}$ ، $\lim\limits_{x\to0}\cos\left(\pi\frac{\sin x}{x}\right)$

33 برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x>-1$:

$$\frac{-1}{x+1}\le\frac{\cos x}{x+1}\le\frac{1}{x+1}$$

هل تقبل الدالة $f:x\mapsto\frac{\cos x}{x+1}$ نهاية عند $+\infty$ ؟

34 f دالة بحيث من اجل كل عدد حقيقي $x>1$ ،

$$\frac{3x+\cos x}{x}\le f(x)\le\frac{3x+7}{x-1}$$

هل تقبل f نهاية عند $+\infty$ ؟

35 f دالة بحيث من اجل كل عدد حقيقي $x\ge0$:

$$|f(x)-3|\le\frac{1}{x^2+1}$$

هل تقبل الدالة f نهاية عند $+\infty$ ؟

36 f دالة بحيث من اجل كل عدد حقيقي $x<0$:

$$f(x)\le-2x^3$$

هل تقبل الدالة f نهاية عند $+\infty$ ؟

37 f دالة بحيث من اجل كل عدد حقيقي $x>0$:

$$f(x)\ge\frac{1}{2}x^4+x$$

هل تقبل الدالة f نهاية عند $+\infty$ ؟

38 1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون:

$$1\leq 3+2\cos x\leq 5$$

2) هل تقبل الدالة $f:x\mapsto \dfrac{x-1}{3+2\cos x}$ نهاية عند $+\infty$ ؟.

39 1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون:

$$x^2-3\sin x\geq x^2-3$$

2) هل تقبل الدالة $f:x\mapsto x^2-\sin 3x$ نهاية عند $+\infty$ ؟

40 هل تقبل الدالة $f:x\mapsto x^2+2x\sin x$ نهاية عند $+\infty$ ؟ و عند $-\infty$ ؟

41 f دالة معرفة على $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ بـ:

$$f(x)=\frac{x+\sin x}{2x+1}$$

1) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x>-\dfrac{1}{2}$:

$$\frac{x-1}{2x+1}\leq f(x)\leq \frac{x+1}{2x+1}$$

2) هل تقبل الدالة f نهاية عند $+\infty$ ؟

5 - الاستمرارية

42 نعتبر الدالة f المعرفة على $[-2;4[$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=x^2+x\ ; & x\in[-2;1[\\ f(x)=x-1\ ; & x\in[1;4[\end{cases}$$

1) مثل بيانيا الدالة f في معلم.هل تقبل الدالة f نهاية عند 1 ؟

2) هل الدالة f مستمرة على المجال $[-2;4[$ ؟ لماذا؟

3) اذكر مجالا تكون الدالة f مستمرة عليه.

43 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=x^2-2x+1\ ; & x\leq 2 \\ f(x)=x^2+x-5\ ; & x>2 \end{cases}$$

1) ادرس استمرارية الدالة f عند 2 .

2) هل الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟ لماذا؟

44 ادرس استمرارية الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\begin{cases} f(x)=-x^2+x+2\ ; & x\leq 1 \\ f(x)=\dfrac{1}{2}x+1\ ; & x>1 \end{cases}$$

45 f دالة عددية معرفة كما يلي:

$f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$ إذا كان $x\neq 1$ و $f(1)=3$

1) ادرس استمرارية f عند 1 .

2) هل الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟

46 لتكن الدالتان f و g المعرفتان على $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}-\{1\}$ على الترتيب كما يلي:

$f(x)=2x^3-x+1$ و $g(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{x-1}$

ادرس استمرارية f و g .

47 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=\left(x^2-x\right)\sin x$$

لماذا الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟

48 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=\frac{\cos x}{1+x^2}$$

ادرس استمرارية f .

49 نعتبر الدالة f المعرفة على $[-2;1[$ كما يلي:

$$f(x)=x\left(x+E(x)\right)$$

حيث $x\mapsto E(x)$ هي دالة الجزء الصحيح

1) عين عبارة $f(x)$ على كل من المجالات التالية:

$[-2;-1[$ ، $[-1;0[$ ، $[0;1[$

2) ارسم في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ المنحنى الممثل للدالة f .

3) هل الدالة f مستمرة على $[-2;-1[$ ، $[-2;0[$ ، $[-2;1[$ ؟

6 - مبرهنة القيم المتوسطة

50 برهن باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة $x^3-4x=-2$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[-3;-2]$

51 نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;2]$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=2x+1 \quad ; \ 0<x\le 1 \\ f(x)=-2x+3 \ ; \ 1\le x<2 \end{cases}$$

1) هل يمكن تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة لإثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلولا في المجال $[0;2]$ ؟

2)تحقق أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا في $[0;2]$.

52 f هي الدالة المعرفة على □ كما يلي:

$$f(x)=3x^3-2x-\frac{1}{4}$$

1) احسب $f(1)$ ، $f(0)$ ، $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ ، $f(-1)$

2) استنتج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل ثلاثة حلول في المجال $[-1;1]$

53 f هي الدالة المعرفة على $[-3;6]$ بـ :

$$f(x)=x^3-12x$$

1) ادرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها

2) ما هو عدد حلول المعادلة $f(x)=30$.

54 بين أن كل دالة كثير حدود درجته فردية تقبل على الأقل جذرا حقيقيا.

55 بين أن المعادلات التالية تقبل على الأقل حلا في المجال I في كل حالة من الحالات التالية:

1) $2x^3+1=0$ ، $I=[-1;0]$

2) $x^5+3x^4-6x^2-1=0$ ، $I=[1;2]$

3) $x^4+4x-3=0$ ، $I=\left[\frac{1}{2};1\right]$

4) $-x^3+3x^2=3$ ، $I=\left[1;\frac{3}{2}\right]$

5) $\frac{1}{2}\sin x+2=x$ ، $I=[0;\pi]$

56 لتكن f دالة مستمرة على المجال $]-3;+\infty[$ و جدول تغيراتها هو الآتي:

x	-3		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	4	↘	2

بين أن المنحني (C_f) الممثل للدالة f يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين مختلفتين يطلب إعطاء حصرا لفاصلتيهما.

57 إليك جدول تغيرات الدالة f المعرفة على □ بـ:

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+1$$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{13}{6}$	↘	$-\frac{7}{3}$	↗	$+\infty$

لماذا المعادلة $f(x)+2=0$ تقبل ثلاثة حلول فقط في □؟

7 ـ الدوال المستمرة و الرتيبة تماما

58 نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1;2]$ بـ:

$$f(x)=2x^3-3x^2-1$$

1) احسب $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

2) ارسم التمثيل البياني للدالة f على شاشة حاسبة بيانية باستعمال نافذة مناسبة.

3) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في $[-1;2]$.

4) باستعمال حاسبة بيانية أوجد حصرا لهذا الحل سعته 10^{-2}.

59 نعتبر الدالة f المعرفة على □ بـ:

$$f(x)=-2x^3+3x^2-x+5$$

1) ادرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها

2) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في □.

3) باستعمال حاسبة بيانية أوجد قيمة مقربة إلى 10^{-2} لهذا الحل.

60 نعتبر الدالة f المعرفة على $[1;2]$ بـ:

$$f(x)=x^4-x^2+1$$

1) ادرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

2) بين أن المعادلة $f(x)=3$ تقبل حلا وحيدا α في $]1;2[$. 3) باستعمال حاسبة بيانية أوجد قيمة مقربة إلى 10^{-2} لـ α

61 بين أن المعادلة $2x^3-5x^2-3=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $\left[\frac{5}{2};3\right]$.

62 بين أن المعادلة $\frac{1}{x+2}=2\cos x$ تقبل حلا وحيدا في المجال $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$.

63 لتكن الدالة f المعرفة على $[0;\pi]$ بـ:

$$f(x)=\cos^3 x-3\cos x+2$$

بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من $[0;\pi]$ بحيث $f(\alpha)=\sqrt{2}$

64 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x)=-x^3+3x^2-1$$

1) ادرس نهايات الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

2) أ) أحسب f' مشتقة الدالة f ثم ادرس إشارتها.

ب) مثل جدول تغيرات الدالة f .

3) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا على كل مجال من المجالات التالية: $[-1;0]$ ، $[0;1]$ ، $[2;3]$

65 f دالة معرفة على $[0;\pi]$ بـ: $f(x)=2+\frac{1}{2}\sin x$

- بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من $[0;\pi]$ بحيث $f(\alpha)=\alpha$

66 لتكن الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)^2$$

1) بين أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $D=[0;2]$

2) لتكن الدالة g المعرفة على D بـ: $g(x)=f(x)-x$

- بين أن الدالة g متناقصة تماما على D .
- احسب $g(0)$ و $g(2)$ ثم استنتج أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا في المجال D .

67 نعتبر الدالتين $f:x\mapsto\sqrt{x+1}$ و $g:x\mapsto -x^3$

- بين أن المنحنيين (C_f) و (C_g) الممثلين للدالتين f و g على الترتيب يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث $-\frac{7}{8}<x_0<-\frac{3}{4}$.

تمارين للتعمق

1 ـ نهاية منتهية أو غير منتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$

68 f هي الدالة المعرفة على $]3;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\frac{x+1}{x-3}$$

1) أوجد عدداً حقيقيا A حيث إذا كان $x>A$ فإن $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]0,99;1,01[$.

2) بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=1$ مقارب للمنحنى C_f الممثل لدالة f، ثم ادرس وضعية C_f بالنسبة إلى Δ .

69 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=x^4+2x^3+1$$

نعلم أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. أوجد عدداً حقيقيا $A>0$ حيث إذا كان $x>A$ فإن $f(x)>10^6$

70 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ

$$f(x)=\frac{x}{(x-1)^2}$$

1) ادرس نهاية الدالة f عند 1.

2) أوجد مجالا I مركزه 1 حيث من أجل كل x من I ، $f(x)>10^6$

2 ـ نهاية منتهية أو غير منتهية عند عدد حقيقي

71 لتكن الدالة f حيث: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+d}$

و (C) تمثيلها البياني.

عين الأعداد الحقيقية a ، b ، c و d بحيث : (C) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x=1$ و مستقيما مقاربا مائلا معادلته

$y=2x+3$ عند $-\infty$ و عند $+\infty$ ويشمل النقطة $A(0;4)$

72 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ :

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2+6x+3}{(x+1)^2}$$

1) عين a ، b ، c و d بحيث من أجل كل عدد حقيقي x يكون $f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{(x+1)^2}$

2) استنتج أن المنحنى (C) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا Δ عند $-\infty$ و عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له

3) حدّد وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى Δ.

73 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$$

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]$

2) استنتج وجود مستقيم مقارب مائل Δ للمنحنى (C) الممثل للدالة f عند $+\infty$.

3) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ب) بين أنه يوجد عددان حقيقيان α و β بحيث

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\alpha$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\alpha x\right]=\beta$

ج) استنتج أن المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا Δ' عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

74 f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}^+$ على الترتيب بـ : $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$

و $g(x)=\sqrt{x^2+4x}$

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]$.

- ما هو التخمين الذي تضعه حول السلوك التقاربي للدالتين f و g عند $+\infty$ ؟

3) حدّد بدون حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-(x+2)\right]$.

ماذا تستنتج ؟

75 f هي الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ :

$$f(x)=x+1+\sqrt{x^2+4x}$$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم .

1) بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x+3$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$

2) ادرس الوضعية النسبية لـ (C) و Δ.

76 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=-\frac{1}{2}x+\sqrt{\left|x^2-1\right|}$$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم .

1) عين D مجموعة تعريف الدالة f .

2) احسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

3) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+\frac{3}{2}x\right]$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}x\right]$.

4) استنتج أن المنحنى (C) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين Δ و Δ' يطلب تعيين معادلتيهما.

5) حدّد وضعية (C) بالنسبة إلى كل من Δ و Δ'.

المنحنيات المتقاربة

77 f هي الدالة المعرفة على $]-2;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x^3+2x^2+1}{x+2}$$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم .

1) احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

2) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x^2\right]$

ب) اشرح لماذا المنحني (C) و المنحني (P) الذي معادلته $y=x^2$ " يتقاربان شيئا فشيئا " عندما يؤول x إلى $+\infty$.

نقول في هذه الحالة أن المنحنيين (C) و (P) متقاربان عند $+\infty$.

ج) ارسم (C) ثم (P).

78 f هي الدالة المعرفة على $]1;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=3x^2-\frac{2}{x-1}$$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم .

1) ابحث عن منحن (P) مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$، ثم حدد الوضعية النسبية لـ (C) و (P) .

2) هل (C) و (P) متقاربان عند $-\infty$.

79 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1}$$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم .

ابحث عن منحن (P) لدالة مرجعية مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$ و عند $-\infty$، ثم حدد الوضعية النسبية لـ (C) و (P).

80 f هي الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x\sqrt{x}}$$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم

.ابحث عن منحن (P) لدالة مرجعية مقارب

للمنحني (C) عند $+\infty$، ثم حدد الوضعية النسبية لـ (C)

و (P).

3 - تتمات على النهايات

81 f هي الدالة المعرفة على $D=\mathbb{R}-\{-1;4\}$ بـ:

$$f(x)=\frac{3x^2+2x}{x^2-3x-4}$$

1) أوجد ثلاثة أعداد حقيقية a، b و c حيث من أجل كل x من D: $f(x)=a+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-4}$

2) ادرس نهايات الدالة f عند حدود مجالات مجموعة التعريف.

82 في كل حالة من الحالات التالية عين مجموعة تعريف الدالة f ثم احسب النهايات عند أطراف مجموعة تعريفها:

1) $f(x)=\frac{x+1}{x^2+2x-3}$ ، 2) $f(x)=\frac{3x}{(x+1)^2}$ ،

3) $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2+x-2}$ ، 4) $f(x)=\frac{x^3-1}{x^2-1}$

5) $f(x)=\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x^2-4}$ ، 6) $f(x)=\frac{(x+2)^3-8}{x}$

83 باستعمال المرافق احسب النهايات التالية:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$ ، $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ ،

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-\sqrt{x+2}$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}+x$

$\lim\limits_{x\to-\infty}x+\sqrt{x^2+3}$ ، $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}$

حيث $a>0$ و $b>0$

84 باستعمال تعريف العدد المشتق احسب النهايات التالية:

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ ، $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}$ ،

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}$ ، $\lim\limits_{x\to3}\frac{x\sqrt{x+1}-6}{x-3}$

85 باستعمال تعريف العدد المشتق احسب النهايات التالية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \quad ، \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} \quad ، \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$$

86 علما أن $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ و $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} \quad ، \quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{x} \quad ، \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x} \quad ،$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{4x} \quad ، \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx} \quad ، \quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{bx}$$

87 احسب النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{1-8x}-3}{x+1}$ ، 2) $\lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$ ،

3) $\lim_{x\to -3^-}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x+3}$ ، 4) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

5) $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$ ، 6) $\lim_{x\to 0}\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x}-x}$

88 باستعمال تعريف العدد المشتق عند $\frac{\pi}{3}$ لكل من

الدالتين $x\mapsto \sin 3x$ و $x\mapsto 2\cos x-1$ ،

احسب النهاية التالية $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin 3x}{2\cos x-1}$

89 باستعمال تعريف العدد المشتق عند $\frac{\pi}{4}$ لكل من

الدالتين $x\mapsto \tan x$ و $x\mapsto 2\cos x-\sqrt{2}$ ، احسب

النهاية التالية $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{2\cos x-\sqrt{2}}$

90 بين باستعمال طريقة مناسبة أن :

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}=2\sqrt{2}$$

و $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\tan x=2$

و $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1}=2$

4 ـ نهاية دالة مركبة – النهايات بالمقارنة

91 باستعمال نهاية مركب دالتين احسب ما يلي:

1) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x-1}{2x-4}}$ ، 2) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x}{x^2-1}}$

3) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{9x^2-x+3}$ ، 4) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

92 باستعمال نهاية مركب دالتين احسب ما يلي:

1) $\lim_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ ، 2) $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}$

3) $\lim_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{\pi x+3}{1+x}\right)$ ، 4) $\lim_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{\pi x+1}{2x}\right)$

5) $\lim_{x\xrightarrow{<}\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\tan^2 x+1}$ ، 6) $\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\times 2\pi\right)$

93 نعتبر الدالة f المعرفة من أجل كل عدد حقيقي

$x>1$ بـ: $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x+1}}$

1) بين أنه إذا كان $x>1$ فإن: $\frac{1}{\sqrt{2x}}>\frac{1}{\sqrt{x+1}}$

2) استنتج $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

94 1) بين انه من أجل كل عدد حقيقي $x>0$:

$$0\le\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\le\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2) استنتج $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

95 بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$-2\le\cos x+\sin x\le 2$ ،

ثم استنتج $\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x+\sin x}{x^2}$

96 1) بين انه من أجل كل عدد حقيقي $x\ge 1$:

$$\frac{1}{2}\le\frac{x}{x+1}\le 1$$

2) استنتج النهايتين التاليتين:

أ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}}{x+1}$ ، ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x}\,(x+1)}$

97 باستعمال نهاية حصر دالتين ، عين النهايتين التاليتين:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2+4(-1)^x}{x}$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+\cos x}{x-1}$

98 من أجل $x>0$ ، قارن $\sqrt{4x^2+5}$ و $2x$.

استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+5}-x$

99 من أجل $x>1$ ، قارن $\sqrt{2x^2-1}$ و $2x$.

استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2-1}-3x$

100 من أجل كل $x>0$ ، قارن $\sqrt{2x^2+x+1}$

و $x\sqrt{2}$.

استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2+x+1}-x$

101 نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي:

$$f(x)=\frac{x(1+\sin x)}{x-\sqrt{x^2+1}}$$

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$\frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}<-2x$$

2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x :

$f(x)\le -4x^2$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

5 - الاستمرارية

102 ادرس استمرارية الدالة f عند x_0 في كل حالة من الحالتين التاليتين:

1) $x_0=0\ ;\begin{cases} f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\ ;\ x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

2) $x_0=0\ ;\begin{cases} f(x)=\frac{|x|}{x}\times\sqrt{|x|}\ ;\ x\neq 0 \\ f(0)=2 \end{cases}$

103 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$\begin{cases} f(x)=\frac{1-\sqrt{x+1}}{x} & ;\ x>0 \\ f(x)=\frac{1-x^2}{x-2} & ;\ x\le 0 \end{cases}$$

بين لن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$

104 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$\begin{cases} f(x)=\frac{x+2-\sqrt{4+x^2}}{x} & ;\ x\neq 0 \\ f(0)=\alpha \end{cases}.$$

عين قيمة العدد α حتى تكون الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

105 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\begin{cases} f(x)=x^2+2x-a & ;\ x>2 \\ f(x)=\frac{2x^2-a+b}{x} & ;\ x\le 2 \end{cases}$$

حيث a و b عددان حقيقيان ثابتان.

عين علاقة بين a و b حتى تكون الدالة f مستمرة عند 2.

6 - مبرهنة القيم المتوسطة-الدوال المستمرة والرتيبة تماما

106 f دالة مستمرة على المجال $[a;b]$ بحيث

$f(a)<ab$ و $f(b)>b^2$

بين أنه يوجد عدد حقيقي c من $[a;b]$ بحيث $f(c)=bc$.

107 f دالة مستمرة على المجال $[0;1]$ بحيث

$f(0)=0$ و $f(1)=1$

بين أنه يوجد عدد حقيقي c من $]0;1[$ بحيث

$$f(c)=\frac{1-c}{1+c}$$

108 f دالة مستمرة معرفة على المجال $I=[0;1]$

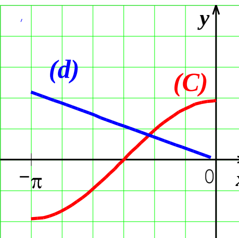
بحيث من اجل كل x من I ، $f(x)\in I$.

بين أنه يوجد على الأقل عدد حقيقي α من I بحيث

$f(\alpha)=\alpha$



109 في الشكل المقابل المنحني (C) هو التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \cos x$ و (d) هو التمثيل البياني للدالة $x \mapsto -\frac{\sqrt{3}}{2}x$ على المجال $I=[-\pi;0]$.



1) خمّن عدد حلول المعادلة $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}x$ في المجال I

2) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال I كما يلي :

$$f(x)=\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

أ) تحقق من أن الدالة f تقبل الاشتقاق على I و احسب $f'(x)$.

ب) شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) استنتج أن المعادلة $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}x$ تقبل حلا واحدا α في المجال I .

110 n عدد طبيعي غير معدوم.

1) بين أن المعادلة $x^{n+1}-2x^{n}+1=0$ تقبل حلا محصورا بين $\frac{2n}{n+1}$ و 2 .

2) هل المعادلة $x^{8}-2x^{7}+1=0$ تقبل حلا في $\mathbb{R}$ إذا كان الجواب نعم عين حصرا لهذا الحل.

مسائل

111 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x^{3}-4x^{2}+8x-4}{(x-1)^{2}}$$

C_f تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد $(O;I,J)$.

1) أ) عين نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف.

ب) ادرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

2) أ) عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 1$: $f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{(x-1)^{2}}$

ب) ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني C_f والمستقيم (d) الذي معادلته $y=x-2$ ؟ برر.

ج) حدّد وضعية C_f بالنسبة لـ (d) ، لتكن A نقطة تقاطع C_f و (d).

3) ارسم C_f و (d) . (تؤخذ الوحدة $2cm$ على (Ox) و $1cm$ على (Oy)).

4) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-\infty;1[$. استنتج قيمة مقربة إلى 10^{-2} للعدد α .

5) استنتج بيانيا عدد حلول المعادلة $f(x)=x+m$ حيث m وسيط حقيقي.

6) أ) نريد إيجاد نتيجة السؤال 5) باستعمال الحساب

بين أن فواصل نقط تقاطع المنحني C_f مع المستقيم الذي معادلته $y=x+m$ هي حلول المعادلة (E) التالية:

$$(m+2)x^{2}-(2m+7)x+m+4=0$$

ب) جد حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E) .

112 f هي الدالة المعرفة على $]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$ بـ :

$$f(x)=x+\frac{x}{\sqrt{x^{2}-4}}$$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم .

1) بين أن الدالة f فردية

2) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف.

3) بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x+1$ مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$. حدّد وضعية (C) بالنسبة لـ Δ

4) باستعمال نتيجة السؤال 1) استنتج أن المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلاً عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

5) ليكن (C') التمثيل البياني للدالة g المعرفة على $]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$ بـ : $g(x)=-f(x)$

• عين المستقيمات المقاربة للمنحنى (C').

113 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ :

$$f(x)=|x+1|+\frac{x}{x^2-1}$$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم .

1) أ) اكتب $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة.

ب) ادرس نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف.

2) أ) احسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها .

ب) مثل جدول تغيرات الدالة f .

3) أ) بين أن المستقيمين $\Delta: y=x+1$ و $\Delta': y=-x-1$ مقاربين للمنحنى (C) عند $+\infty$ و $-\infty$ على الترتيب.

ب) ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى Δ على المجال $]1;+\infty[$ و ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى Δ' على المجال $]-\infty;-1[$.

4) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً واحداً α على المجال $]-1;1[$ ، وأعط حصراً لـ α سعته 10^{-1} .

114 نعتبر الدالتين f و g المعرفتان على المجموعة $]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$ كما يلي :

$$f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$$

و $$g(x)=x-\sqrt{x^2-1}$$

و C_f و C_g تمثيلاهما البيانيين على الترتيب في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أ) عين نهاية الدالة f عند $+\infty$

ب) عين نهاية الدالة f عند $-\infty$. استنتج أن المنحنى C_f يقبل مستقيما مقاربا أفقيا.

ج) بين أن المستقيم $\Delta: y=2x$ مقارب للمنحنى C_f عند $+\infty$.

2) أ) احسب $f(x)\times g(x)$ ثم استنتج نهايات الدالة g عند $+\infty$ و $-\infty$.

ب) ما هو التفسير الهندسي لهذه النتيجة ؟

ج) قارن بين $g(x)-2x$ و $f(x)$.

استنتج $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)-2x$، أعط تفسيرا هندسيا للنتيجة.

3) نعتبر المنحنى $(\Gamma)=C_f\cup C_g$.

بين أن معادلة (Γ) هي $y^2-2xy+1=0$

4) ليكن الشعاع $\vec{u}$ من المستوي حيث $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}$.

نرمز بـ $(x;y)$ لاحداثيتي النقطة M في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

و بـ $(x';y')$ احداثياتها في المعلم $(O;\vec{i},\vec{u})$

أ) عبر عن x و y بدلالة x' و y' .

ب) عين معادلة (Γ) في المعلم $(O;\vec{i},\vec{u})$.

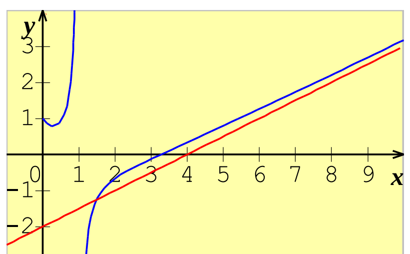
ج) ما طبيعة (Γ) .

اختيار من متعدد

115 عين الإجابة الصحيحة دون تبرير

في الشكل الموالي لدينا الرسم البياني C_f لدالة f معرفة على $D=[0;1[\cup]1;+\infty[$ كما يلي:

$f(x)=\dfrac{x^3-4x^2+3x-2}{2(x^2-1)}$ و المستقيم Δ الذي معادلته $y=\dfrac{1}{2}x-2$



1) أ) المستقيم الذي معادلته $y=1$ مقارب لـ C_f

ب) المستقيم الذي معادلته $x=1$ مقارب لـ C_f

ج) C_f لا يقبل مستقيما مقاربا أفقيا و لا عموديا.

2) من أجل كل من $]1;+\infty[$: $f(x)=\frac{1}{2}x+a+\frac{bx+c}{2(x^2-1)}$

أ) $a=-2$ ، $b=2$ ، $c=-3$

ب) $a=2$ ، $b=-2$ ، $c=-3$

ج) $a=1$ ، $b=2$ ، $c=3$

3) C_f يقبل مستقيما مقاربا عند $+\infty$ معادلته:

أ) $y=\frac{1}{2}x+1$ ب) $y=\frac{1}{2}x+2$ ج) $y=\frac{1}{2}x-2$

4) أ) C_f يقطع المستقيم المقارب في النقطة $A\left(\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$

ب) C_f يقطع المستقيم المقارب في النقطة $B\left(\frac{3}{2};-\frac{5}{4}\right)$

ج) C_f لا يقطع المستقيم المقارب في أية نقطة.

5) على المجال $[0;1[$ ، المعادلة $f(x)=1$ تقبل:

أ) حلا واحدا ب) حلين متمايزين ج) ثلاثة حلول.

116 f معرفة على $\mathbb{R}-\{5\}$ بـ: $f(x)=\frac{3x^2-5x}{x-5}$

1) $\lim_{x\to5} f(x)=-\infty$ 2) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

3) من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{5\}$:

$$f(x)=3x+10+\frac{50}{x-5}$$

4) المستقيمان اللذان معادلتاهما $x=5$ و $y=3x+10$ مقاربان لمنحنى الدالة f.

صحيح أم خاطئ

117 إليك جدول تغيرات دالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	||	+	0	−	
$f(x)$	1	↗	2	↘	$-\infty$ || $-\infty$	↗	3	↘	$-\infty$

نرمز بـ C_f إلى منحنى الدالة f الممثل في معلم. أجب بصحيح أو خاطئ على كل جملة من الجمل التالية:

1) المستقيم الذي معادلته $x=1$ مقارب لـ C_f.

2) محور التراتيب مقارب لـ C_f.

3) المستقيم الذي معادلته $y=1$ يقطع C_f في نقطة واحدة.

4) المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين في المجال $]0;+\infty[$.

5) على المجال $]-\infty;0[$ ، $f(x)\leq 3$

118 f دالة مستمرة و متناقصة تماما على $[0;+\infty[$، إذن:

أ) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

ب) من أجل كل x من $[0;+\infty[$: $f(x)<f(0)$

ج) منحنى الدالة f يقطع محور الفواصل على الأقل في نقطة.

119 C_f هو المنحنى الممثل لدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ في معلم متعامد و متجانس و Δ المستقيم الذي معادلته $y=1-x$

1) إذا كان Δ مقاربا لـ C_f عند $-\infty$ فإن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

2) إذا كان Δ مقاربا لـ C_f عند $+\infty$ فلا يوجد مستقيم مقارب أفقي لـ C_f.

3) إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} f(x)=3$ فلا يمكن لـ Δ أن يكون مقاربا لـ C_f.

4) إذا كان Δ مقاربا لـ C_f عند $+\infty$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x)+x=1$

120 1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=1$ 2) $\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x}=1$

3) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{x}=1$ 4) $\lim_{x\to0}\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{\sin x}{x}\right)=1$